



TÍTULO

CONOCIMIENTO ESPECIALIZADO DE UN MAESTRO DE
PRIMARIA EN TORNO A LA DEFINICIÓN DE POLÍGONO

AUTOR

Alfonso Morato Caleza

Esta edición electrónica ha sido realizada en 2017

Instituciones	Universidad Internacional de Andalucía ; Universidad de Huelva
Directora/Tutora	Dra. Nuria Climent Rodríguez
Curso	<i>Máster Oficial en Investigación de la Enseñanza y el Aprendizaje de las Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas (2016/2017)</i>
ISBN	978-84-7993-618-1
©	Alfonso Morato Caleza
©	De esta edición: Universidad Internacional de Andalucía
Fecha documento	2017



Reconocimiento-No comercial-Sin obras derivadas

Usted es libre de:

- Copiar, distribuir y comunicar públicamente la obra.

Bajo las condiciones siguientes:

- **Reconocimiento.** Debe reconocer los créditos de la obra de la manera especificada por el autor o el licenciador (pero no de una manera que sugiera que tiene su apoyo o apoyan el uso que hace de su obra).
- **No comercial.** No puede utilizar esta obra para fines comerciales.
- **Sin obras derivadas.** No se puede alterar, transformar o generar una obra derivada a partir de esta obra.
- *Al reutilizar o distribuir la obra, tiene que dejar bien claro los términos de la licencia de esta obra.*
- *Alguna de estas condiciones puede no aplicarse si se obtiene el permiso del titular de los derechos de autor.*
- *Nada en esta licencia menoscaba o restringe los derechos morales del autor.*

Trabajo Fin de Máster

“Investigación en la Enseñanza y el Aprendizaje de las
Ciencias Experimentales, Sociales y Matemáticas”

Conocimiento especializado de un maestro de Primaria en torno a la definición de polígono



Alfonso Morato Caleza

Dirigido por la Dra. Nuria Climent Rodríguez

Curso 2016-2017

Septiembre 2017

Conocimiento especializado de un maestro de Primaria en torno a la definición de polígono

Resumen

Numerosas investigaciones han abordado la importancia del conocimiento del profesor de matemáticas, considerándolo como un conocimiento especializado. En este estudio se analiza a un maestro con el objetivo de identificar el conocimiento que sustenta su práctica para, posteriormente, elaborar una propuesta del conocimiento especializado deseable. Para ello, se ha utilizado un video en el que unos alumnos de 5º de Educación Primaria tienen que construir una definición de polígono a partir de unos ejemplos dados por el maestro y una metodología de carácter cualitativo dentro del paradigma interpretativo. Finalmente, se observa la importancia del conocimiento del maestro, pues es lo que permite guiar a los alumnos en la realización de la tarea.

Palabras clave: polígono, primaria, conocimiento especializado del profesor, definición.

A primary teacher's specialised knowledge in relation to the definition of polygon

Abstract

Many investigations have examined the importance of mathematics teacher's knowledge, considering this like a specialised knowledge. In this research, a teacher is analyzed with the aim of identifying the knowledge which supports his practice for developing a proposal of ideal specialised knowledge. For this reason, a video shows how Primary students have to construct a definition of polygon using some examples previously selected by the teacher, and qualitative methodology in an interpretative paradigm. Finally, it is evinced the importance of the teacher's knowledge because it allows students to follow this task.

Keywords: polygon, primary, teacher's specialised knowledge, definition.

1.- INTRODUCCIÓN

A pesar de la importancia que tiene la Geometría en el currículo de Educación Primaria, esta no se ve reflejada en la práctica debido a la formación de los propios maestros y al poco tiempo que estos le dedican (Muñoz-Catalán, Montes, Carrillo, Climent, Contreras, y Aguilar, 2013). De manera que frecuentemente nos encontramos con enseñanzas tradicionales que se limitan al uso de fórmulas y a una visión estática de sus elementos, dificultando el modo de pensar y de razonar de los alumnos en la resolución de problemas.

En este estudio se analiza el conocimiento de un maestro en torno a la definición de polígono. Para ello, se planificó una actividad en la que unos alumnos de 5º de Educación Primaria tenían que construir una definición de polígono de manera colaborativa. A partir de esta tarea, se parte de la idea de que el modo en el que se presentan las definiciones a los alumnos establece las relaciones entre la imagen y la definición del concepto, constituyendo una parte esencial del conocimiento matemático que afecta a los procesos de pensamiento de los estudiantes (Tall y Vinner, 1981; citado en Zazkis y Leikin, 2008).

Esta investigación surge del interés por comprender el conocimiento que requiere un maestro para la enseñanza de las matemáticas, en particular en relación con la definición de polígono. Esto se debe a mi voluntad de seguir formándome tanto como investigador como profesor, de manera que mis alumnos puedan aprender a partir de actividades que promuevan la construcción y reflexión de los conceptos geométricos, y la búsqueda de relaciones entre estos. Además, espero con esta investigación contribuir modestamente a otras investigaciones y al desarrollo profesional de otros docentes.

Las preguntas de investigación que se formulan en este trabajo son las siguientes:

- a. ¿Qué conocimiento especializado sustenta la práctica de un maestro de Primaria en torno a la definición de polígono?
- b. ¿Qué conocimiento especializado necesita un maestro de Primaria en torno a la definición de polígono?

Finalmente, se señala que los objetivos de esta investigación son: (a) identificar el conocimiento especializado que sustenta la práctica de un maestro de Primaria en torno a la definición de polígono, y (b) elaborar una propuesta de conocimiento especializado deseable para el maestro de Primaria en torno a la definición de polígono.

2.- MARCO TEÓRICO

2.1.- Conocimiento especializado del profesor de matemáticas

Para realizar el estudio del conocimiento especializado del profesor de matemáticas se tomará como base el *Mathematics Teachers' Specialised Knowledge (MTSK)* (Carrillo, Climent, Contreras & Muñoz-Catalán, 2013). Este es un modelo que permite analizar el conocimiento del profesor de matemáticas; se basa en el modelo propuesto por Ball, Thames y Phelps (2008), conocido como *Mathematical Knowledge for Teaching (MKT)*, intentando responder a las dificultades encontradas en el uso analítico de este último.

El modelo propone dos dominios para el conocimiento especializado del profesor: *conocimiento matemático (MK¹)* y *conocimiento didáctico del contenido (PCK)*, coincidiendo con la diferenciación ya hecha por Shulman en 1986, los cuales se subdividen en tres subdominios y categorías internas a estos. El conocimiento matemático recoge los contenidos matemáticos que conoce o puede conocer el profesor y cómo los conoce. Este se divide en tres subdominios:

- El *conocimiento de los temas matemáticos (KoT)* describe qué conoce el profesor acerca de los contenidos matemáticos que va a enseñar. Se diferencian cuatro categorías: *Procedimientos*; *Definiciones*, *Propiedades y sus Fundamentos*; *Registros de Representación*; y *Fenomenología y sus Aplicaciones*. Por ejemplo, conocer las propiedades de los polígonos.
- El *conocimiento de la estructura matemática (KSM)* se centra en las relaciones que el profesor establece entre los distintos contenidos matemáticos. Se divide en cuatro categorías: *Conexiones de Complejización*; *Conexiones de Simplificación*; *Conexiones Transversales*; y *Conexiones Auxiliares*. Por ejemplo, comprender la complejización del procedimiento de clasificación, desde la clasificación exclusiva hasta la inclusiva, y aplicando criterios simultáneos.
- El *conocimiento de la práctica matemática (KPM)* considera el conocimiento del profesor sobre las formas de proceder para llegar a resultados matemáticos; su conocimiento acerca de la lógica proposicional y de la sintaxis de las matemáticas.

¹ Nos referiremos a los dominios y subdominios del MTSK por sus siglas, que hacen referencia a los términos en inglés (MK - Mathematical Knowledge; PCK - Pedagogical Content Knowledge; KoT - Knowledge of Topics; KSM - Knowledge of the Structure of Mathematics; KPM - Knowledge of the Practice of Mathematics; KFLM- Knowledge of Features of Learning Mathematics; KMT- Knowledge of Mathematics Teaching; KMLS - Knowledge of Mathematics Learning Standards).

Este subdominio no se divide en categorías como los demás, pues está pendiente de desarrollo. Por ejemplo, que el profesor conozca las características que debe verificar una definición matemática.

Por otra parte, el conocimiento didáctico del contenido caracteriza el conocimiento de la labor de enseñanza como un conocimiento particular del profesor. Este se divide en tres subdominios:

- El *conocimiento de las características del aprendizaje matemático (KFLM)* se centra en las características del aprendizaje relacionadas con el contenido matemático (cómo se aprenden las matemáticas, cómo piensan los alumnos en la realización de ciertas actividades, etc.). Se divide en cuatro categorías: *Teorías de Aprendizaje; Fortalezas y Dificultades; Formas de Interacción con un contenido matemático; e Intereses y Expectativas*. Por ejemplo, que el profesor conozca la posibilidad de realizar clasificaciones inclusivas al final de la educación primaria.
- El *conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (KMT)* analiza el conocimiento sobre los recursos, materiales, las maneras de presentar un contenido y los ejemplos más adecuados. Se subdivide en tres categorías: *Teorías de Enseñanza; Recursos Materiales y Virtuales; y Estrategias, Técnicas, Tareas y Ejemplos*. Por ejemplo, conocer las posibilidades que puede ofrecer el geoplano para trabajar la clasificación de polígonos.
- El *conocimiento de los estándares de aprendizajes de las matemáticas (KMLS)* se ocupa del conocimiento que tiene un profesor acerca de lo que tiene que saber un alumno y el nivel que debe alcanzar según lo establecido en la ley y otras orientaciones profesionales. Se divide en tres categorías: *Expectativas de Aprendizaje; Nivel de Desarrollo Conceptual o Procedimental Esperado; y Secuenciación con temas Anteriores y Posteriores*. Por ejemplo, saber que la noción de área, como cuantificación de un recubrimiento, se imparte en cuarto de primaria según el currículo.

2.2.- Los polígonos y la definición de polígono en Educación Primaria

Según el Decreto 97/2015, de 3 de marzo, por el que se establece la ordenación y el currículo correspondiente a la Educación Primaria en Andalucía, la enseñanza de la geometría debe consistir en analizar propiedades, clasificar y razonar, y no se debe centrar

solo en la descripción de figuras. Por tanto, es conveniente utilizar la experimentación a través de materiales manipulables y recursos tecnológicos.

La enseñanza de la geometría favorece la búsqueda de conjeturas y demostraciones, permite a los alumnos iniciarse en los diferentes tipos de verificaciones y comenzar a realizar razonamientos (Climent y Carrillo, 2005). Sin embargo, frecuentemente nos encontramos con enseñanzas tradicionales que se limitan al uso de fórmulas y a una visión estática de sus elementos, evitando así la construcción y reflexión de los conceptos geométricos y la búsqueda de relaciones entre estos.

Generalmente, los profesores y libros de texto utilizan dos métodos de enseñanza cuando presentan un nuevo contenido geométrico (Gutiérrez y Jaime, 1996). El primero consiste en enunciar la definición del concepto para realizar, a continuación, ejercicios de memorización y reconocimiento de figuras. En el segundo, se comienza presentando varias imágenes relacionadas con el concepto de las cuales se describen sus características para poder enunciar posteriormente una definición matemática del concepto y, por último, se realizan ejercicios de memorización y reconocimiento de figuras.

Aunque muchos maestros dan más importancia a las definiciones formales porque creen que los estudiantes basan sus razonamientos en estas, lo que un alumno realmente recuerda cuando piensa en un concepto geométrico son los diferentes ejemplos y propiedades que asocia a dicho concepto; esto es lo que se conoce como *imagen del concepto* (Vinner, 1983, 1991, citados en Gutiérrez y Jaime, 1996). Por otra parte, se entiende por *definición de un concepto* a la definición verbal que los estudiantes son capaces de memorizar y recitar, pero que no está necesariamente relacionada con la imagen de dicho concepto (Vinner y Hershkowitz, 1983, citado en Gutiérrez y Jaime, 1996). Por ejemplo, muchos alumnos conocen la definición de polígono regular; sin embargo, reconocen los rectángulos como polígonos regulares por tener todos los lados iguales.

Para la correcta formación de la imagen de un concepto, es necesario que se utilice una gran variedad de ejemplos, evitando aquellos prototípicos (Gutiérrez y Jaime, 1996). Sin embargo, habitualmente los maestros utilizan pocos ejemplos de polígonos cóncavos (López y Esteves, 2015) o consideran solamente figuras geométricas que tienen un nombre “oficial”, impidiendo así que los alumnos sean capaces de clasificarlos (Medici, 1986, citado en López y Esteves, 2015).

2.3.- Definir como actividad geométrica

Las definiciones son un componente básico del conocimiento geométrico y aprender a definir es un problema elemental de la educación matemática, el cual se obtiene de la negociación entre el rigor lógico y la creatividad (Mariotti y Fischbein, 1997). Zaslavsky y Shir (2005) recogen los roles principales de las definiciones matemáticas: (a) introducir los objetos matemáticos y caracterizarlos a partir de sus propiedades (Mariotti y Fischbein, 1997; Pimm, 1993; Rissland, 1978); (b) constituir los componentes necesarios para la formación de un concepto (Klausmeier y Feldman, 1975; Sowder, 1980; Vinnerm 1991; Wilson, 1990); (c) establecer la fundamentación necesaria para las demostraciones y la resolución de problemas (Moore, 1994; Weber, 2002); (d) crear uniformidad en el significado de los conceptos, los cuales nos permiten comunicar las ideas matemáticas más fácilmente (Borasi, 1992).

Se pueden diferenciar dos tipos de definición de conceptos: *definición descriptiva* (a posteriori) y *definición constructiva* (a priori) (Krygowska, 1971; Human, 1978; De Villiers, 1986, 1994; citados en De Villiers, 1998). Mientras que, en la descriptiva, el concepto y sus propiedades son conocidas de manera que a partir de un subconjunto del total de las propiedades se pueden deducir el resto; en la constructiva, la definición de un concepto se tiene a través de ser experimentalmente y lógicamente explorado. Muñoz-Catalán et al. (2013) destacan la importancia de las actividades de construir una definición, las cuales permiten a los estudiantes comprender las características y propiedades de las figuras, realizar conjeturas y percibir las diferencias entre la imagen y la definición del concepto. Para ello, los alumnos deben implicarse en tal proceso, guiados con ejemplos que sirvan de modelos (De Villiers, 1994, citado en De Villiers, 1998).

A partir de un ejemplo de un concepto se puede diferenciar entre *atributos relevantes* (propiedades necesarias) y *atributos no críticos* (propiedades no necesarias). Por tanto, definir consiste en establecer un criterio para clasificar ejemplos como pertenecientes o no a un concepto (Jaime, Chapa y Gutiérrez, 1992). Borasi (1992, citado en Morgan, 2005) recoge los requisitos comúnmente aceptados para las definiciones matemáticas: (a) no debe incluir el término que se está tratando de definir; (b) los términos empleados deben haber sido definidos previamente, a menos que estos sean uno de los *términos indefinidos* asumidos como punto de partida en el sistema axiomático con el que se está trabajando; (c) todos los casos del concepto deben cumplir con todos los requisitos indicados en su definición, mientras que si no pertenece al concepto entonces no debe

satisfacer al menos uno de ellos; (d) solamente se deben mencionar explícitamente los términos y propiedades necesarias; (e) las propiedades incluidas no deben contradecirse.

Finalmente, Bartolini Bussi (1991, citado en Mariotti y Fischbein, 1997) señala que, en la construcción de la definición de un concepto a partir de la discusión de los propios alumnos, estos se encuentran con dificultades en los aspectos teóricos y, en ese momento, es cuando el papel del profesor adquiere especial relevancia, pues tiene que guiar el trabajo de los alumnos (Mariotti y Fischbein, 1997).

2.4.- Conocimiento del profesor sobre la definición de polígono

Las principales investigaciones que se han encontrado en relación al conocimiento del profesor sobre la definición de polígono hacen referencia a los estudiantes para maestros (EPM). En general, el conocimiento que tienen los EPM no es el adecuado para su futura labor docente, quienes asocian el estudio de la Geometría a un proceso memorístico, que se centra en la aplicación de conceptos y procedimientos explicados anteriormente (Gutiérrez y Jaime, 1996; Contreras y Blanco, 2001; Climent, 2011; citados en Escudero y Carrillo, 2014).

Generalmente, estos tienen dificultades para relacionar las figuras que se encuentran en posiciones no convencionales, evidenciándose así la influencia de las imágenes prototípicas (Hershkowitz, 1990, citado en Escudero y Carrillo, 2014). También se observa que, aunque son capaces de memorizar una definición, no comprenden los conceptos y no llegan a razonar sobre ellos, dificultando que sean capaces de aplicar correctamente las definiciones (Escudero y Carrillo, 2014). Además, presentan dificultades para diferenciar las condiciones necesarias y suficientes de una definición y para realizar definiciones a partir de las características de las figuras que no sean lados y ángulos, ni a partir de otras figuras más generales (Zazkis y Leikin, 2008, citado en Escudero y Carrillo, 2008).

Por último, los EPM no reconocen que una figura geométrica pueda tener diferentes definiciones (Vecino, 2003, citado en Escudero y Carrillo, 2008), y tienen dificultades para realizar clasificaciones inclusivas (Contreras y Blanco, 2001, citado en Escudero y Carrillo, 2008).

2.5.- Categorías de análisis iniciales (teóricas) sobre MTSK acerca de la definición de polígono

Para el análisis del conocimiento del maestro, se ha tomado como referencia los trabajos de Aguilar (2016) y de Climent, Carreño y Ribeiro (2014), que analizan el conocimiento del maestro sobre los polígonos. A continuación, se recoge una tabla que servirá como punto de partida para el análisis de esta investigación.

Sub-dominio	Categoría	Indicador
KoT	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	<ul style="list-style-type: none"> • Conoce las propiedades y los elementos de los polígonos. • Sabe una definición verbal de polígono. • Conoce las clasificaciones de los polígonos en función de criterios.
KSM	Conexiones de complejización	<ul style="list-style-type: none"> • Establece conexiones entre formas planas y tridimensionales. • Comprende la complejización del procedimiento de clasificación, desde la clasificación exclusiva hasta la inclusiva, y aplicando criterios simultáneos.
KPM	<i>Categorías pendientes de desarrollo</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Entiende el papel de la justificación en matemáticas. • Conoce cómo se define, qué es una definición y cuáles son sus características.
KFLM	Fortalezas y dificultades	<ul style="list-style-type: none"> • Entiende las dificultades de los alumnos para construir la definición de polígono a partir de sus características.
KMT	Recursos materiales y virtuales	<ul style="list-style-type: none"> • Conoce las posibilidades del geoplano para trabajar la clasificación de polígonos.
	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	<ul style="list-style-type: none"> • Utiliza un procedimiento de comparación a partir de varias figuras para la construcción de la definición de polígono. • Deriva el concepto de polígono a partir de los cuerpos geométricos. • Usa la argumentación de sus afirmaciones y la utilización de vocabulario geométrico.

Tabla 1. Indicadores de análisis iniciales

3.- METODOLOGÍA

Esta investigación se sitúa en el paradigma interpretativo debido a que busca comprender, describir e interpretar el conocimiento de un maestro de Educación Primaria en el aula de matemáticas (Muñoz Catalán, 2009). Además, es de naturaleza cualitativa, pues se han utilizado grabaciones para analizar un fenómeno en su entorno natural desde la perspectiva interpretativa (Denzin y Lincoln, 2000, citado en Muñoz Catalán, 2009).

Se ha utilizado un estudio de caso que permita profundizar en el conocimiento de un maestro en su propio contexto (Muñoz Catalán, 2009). No obstante, aunque se hable de estudio de caso, este no verifica todas las condiciones que tienen las investigaciones de este tipo; pues no analiza su evolución a lo largo del tiempo, la fase de preparación ha sido realizada previamente al estudio y no se han discutido los resultados con el maestro participante (Novo, 2014).

Entendemos por estudio de caso la definición dada por Bassey (1999, citado en Muñoz Catalán, 2009): *“Un estudio de caso es el estudio de una singularidad conducida en profundidad en entornos naturales”*. En esta investigación se estudia un único caso, el de Ernesto, a partir del cual se pretende analizar el conocimiento especializado de matemáticas que posee; no obstante, el interés no se centra en el propio maestro, sino en un fenómeno asociado a él. De esta manera, el estudio de caso es un instrumento para conseguir algo diferente del conocimiento particular que el maestro tiene; por tanto, se puede decir que esta investigación se trata de un estudio instrumental de casos (Stake, 2005).

El maestro que ha participado en la investigación forma parte de un grupo que desarrolla un Proyecto de Investigación Educativa financiado por la Junta de Andalucía. Este grupo (al que denominaremos PIC, por desarrollar proyectos de investigación colaborativa) está formado por maestros, profesores e investigadores de educación matemática que tienen como objetivo la aplicación de la investigación en el aula y la formación de maestros.

Como instrumento de recogida de datos se ha utilizado una grabación en vídeo de la actividad, la cual fue planificada previamente en el PIC para un grupo de 5º de Educación Primaria. Las sesiones se grabaron y analizaron en el PIC hace varios años, por lo que no ha sido posible contactar con el maestro para realizar una entrevista. Como instrumento de análisis se ha utilizado el modelo MTSK, utilizando unos indicadores iniciales (Tabla

1) que, a lo largo del análisis, han sido modificados. Se ha analizado el contenido del video, identificando unidades de información asociadas a uno o varios subdominios.

Descripción de la sesión analizada

La sesión que vamos analizar está dividida en dos partes y se trata de una actividad en la que los alumnos tienen que realizar una clasificación de unas figuras geométricas planas para, posteriormente, construir la definición de polígono.

Parte 1. El maestro muestra una bolsa que contiene diferentes figuras planas de cartulina y explica a los alumnos que deben coger cada uno una figura y pegarla en la pizarra, de manera que vayan haciendo grupos en función de sus propios criterios. Una vez que se han colocado todas las figuras, se obtienen dos grupos (polígonos y no polígonos) al diferenciar entre aquellos que tienen alguna línea curva.

Parte 2. A partir de la clasificación realizada, el maestro propone construir una definición de polígono. Para ello, les pide que digan qué propiedades verifican esas figuras y las diferencian de las figuras del otro grupo. El maestro cuestiona en cada momento si la definición incluye a todos los polígonos, ayudándose de los ejemplos de la pizarra y de otros que propone él mismo.

4.- RESULTADOS

4.1.- Descripción del MTSK de Ernesto

A continuación, se muestra el análisis del conocimiento del maestro dividido en las dos partes de la actividad descritas anteriormente.

Parte 1

Al comienzo de esta parte, cuando los alumnos van a comenzar la clasificación, se evidencia el conocimiento de la práctica matemática (**KPM**) del maestro al decir: “*¿En qué crees que está relacionada? y si no está relacionada tienes que decir por qué no está relacionada*”. Es decir, sabe que, para poder clasificar objetos matemáticos, se debe seguir algún criterio específico que permita compararlos. A partir de los ejemplos utilizados, se evidencia que Ernesto conoce algunas representaciones de distintas figuras geométricas (**KoT- Registros de representación**) y, además, se puede señalar como indicio que espera que los alumnos realicen una clasificación que diferencie entre

polígonos y no polígonos, ya que este concepto ha sido estudiado por estos en cursos anteriores (**KMLS- Nivel de desarrollo conceptual o procedimental esperado**).

Además, parece que Ernesto, puede que implícitamente, asocia clasificar y definir en geometría; pues propone primero clasificar las figuras y después construir una definición para las figuras que pertenecen a un grupo (los polígonos), de modo que las que no pertenecen al grupo queden excluidas. Esta idea de qué es definir en matemáticas muestra su conocimiento de la práctica matemática (**KPM**). A continuación, se muestran los dos grupos (polígonos y no polígonos) formados por los alumnos (tal como Ernesto las dispone en la pizarra).



Imagen 1. Figuras poligonales



Imagen 2. Figuras no poligonales

A partir de estos ejemplos también se puede observar que el maestro tiene una imagen del concepto de polígono formada por una variedad de ejemplos (**KoT- Definiciones, propiedades y sus fundamentos**) y que conoce las dificultades que pueden tener los alumnos respecto a la formación de dicha imagen (**KFLM- Fortalezas y dificultades**). Por eso, utiliza una gran variedad de ejemplos, evitando usar solamente los prototípicos, como los polígonos cóncavos o los que no tienen un nombre “oficial”; y también coloca algunos en posiciones no habituales; por ejemplo, un triángulo rectángulo con uno de los vértices sobre la horizontal (**KMT- Estrategias, técnicas y ejemplos**).

Durante el proceso de clasificación, Ernesto utiliza un vocabulario específico de las figuras geométricas que van apareciendo, como “*pentágono*” (**KoT- Registros de representación**) y va haciendo uso de su conocimiento sobre las propiedades de los polígonos (**KoT- Definiciones, propiedades y sus fundamentos**) que es lo que le

permite guiar a los alumnos en la construcción de la definición; por ejemplo, sabe que los polígonos no tienen curvas. Además, conoce que los alumnos han estudiado anteriormente los polígonos, pues constantemente va haciendo preguntas sobre cómo se nombran las diferentes figuras (**KMLS- Secuenciación con temas anteriores y posteriores**).

Maestro: *“Enséñasela a tus compañeros primero. ¿Eso qué es?”*

Alumno: *“Eh... ¿esto cómo se llama? Pentágono, ¿no?”*

Maestro: *“Pentágono”* (afirmando) *“¿Dónde debe ir aquí (grupo de los polígonos) o ahí (grupo de los no polígonos)?”*.

Alumno: *“Aquí porque no tiene curvas”* (la coloca junto al resto de polígonos).

Maestro: *“Porque no tiene curvas, ¿estáis de acuerdo?”*

Parte 2

Al comenzar esta parte, se observa que el maestro conoce la utilidad de una definición matemática y cuál es su papel, pues sabe que a partir de esta debe ser posible poder diferenciar si una figura cualquiera es un polígono o no (**KPM**). Además, como se observa en la unidad de información que sigue, sabe que cuando se define no se puede usar el término a definir, en este caso, *“polígono”* (**KPM**). De nuevo, vuelve a hacer uso del conocimiento que tiene sobre las propiedades de los polígonos (**KoT- Definiciones, propiedades y sus fundamentos**), pues sabe que los polígonos *“tienen todos los lados rectos”*, y usa un vocabulario específico del tema, como *“polígonos”* o *“lados rectos”* (**KoT- Registros de representación**).

Maestro: *“Vamos a decir entre todos cuál sería la definición de polígono. Sabéis lo que significa definición, ¿no? Viendo esta definición, tenemos que saber cuáles serían polígonos y cuáles no, según la (definición) que escribamos aquí entre todos juntos, ¿Vale? ¿Cómo podríamos empezar la definición?”*.

Alumno: *“Todos tienen lados rectos”*.

Maestro: *“Todos tienen lados rectos, pero ¿todos qué?”*.

Alumno: *“Todos los polígonos”*.

Maestro: *“Pero no puedes poner polígono, ¿cómo lo puedes llamar? Figuras, ¿no?”*

A continuación, se evidencia cómo Ernesto vuelve a hacer uso de su conocimiento de la práctica matemática (**KPM**), pues recuerda a los alumnos la utilidad de una definición y

sabe que para construirla hay que fijarse en las características comunes de las figuras. En este caso, se podría ver como una oportunidad que el maestro ejemplificara lo que es una característica, debido a que los alumnos pueden tener dificultades para entender a qué se refiere. De hecho, al principio, solamente se fijan en los elementos, pues la definición comienza de la siguiente forma: *“Todas las figuras tienen lados rectos, tienen ángulos, tienen vértices...”*. Además, de nuevo, hace uso del conocimiento de las propiedades de los polígonos (**KoT- Definiciones, propiedades y sus fundamentos**), en este caso, sabe que los polígonos no tienen que tener todos los lados iguales.

Maestro: *“¿Tú qué has dicho antes?”*.

Alumno: *“Hay algunos que no tienen todos los lados iguales”*.

Maestro: *“Pero tiene que ser que valgan para todas las figuras. De manera que cuando veamos esto (la definición), tenemos que decir que lo es porque viene aquí (la definición). Pero no decir características de dos o tres, sino de todos”*.

Aparte de decir las características comunes, Ernesto sabe que, para generar una definición matemática, es necesario incluir las propiedades que permitan diferenciar al objeto a definir del resto (**KPM**) cuando dice: *“Estamos diciendo características de los polígonos, pero que también son características de otras figuras”*. Para obtener las características diferenciadoras, utiliza una estrategia de construcción por negación: *“Tienen lados rectos, y ¿qué es lo que no tienen?”*, observándose su conocimiento para generar definiciones (**KPM**). Puede que utilice esta estrategia porque sea más natural para él o porque sea más fácil para los alumnos, evidenciándose su conocimiento de la enseñanza de las matemáticas (**KMT- Estrategias, técnicas y ejemplos**).

En la siguiente unidad se relacionan tres subdominios del MTSK. El maestro sabe que la definición escrita hasta el momento no permite distinguir un polígono de otras figuras (**KMP**), en particular, sabe que los polígonos tienen que ser figuras planas (**KoT- Definiciones, propiedades y sus fundamentos**). Por eso, utiliza una caja de tizas como ejemplo que permita ver a los alumnos la necesidad de incluir dicha propiedad (**KMT- Estrategias, técnicas y ejemplos**) y, por tanto, parece que también conoce el papel de los contraejemplos en la construcción de una definición (**KPM**). Además, va utilizando un vocabulario específico del tema (**KoT- Registros de representación**), como *“figuras planas”*.

Maestro: “*Habrá que poner alguna característica más aquí (señala la definición de polígono escrita en la pizarra) porque esto (señala una caja de tizas) no es un polígono.   Cuál es la diferencia? Esta figura (señala un rectángulo) es... ”.*

Alumno: “*Plana*”.

Maestro: “*Plana, vale. Y esta (la caja de tizas) no es plana. Esto no es un polígono*”.

A partir de las aportaciones de los alumnos se construye la siguiente definición de polígono: “*Todas las figuras tienen lados rectos, tienen ángulos, tienen v rtices, no tienen ninguna curva, son figuras planas y todos los lados tienen que estar unidos por los dos extremos*”. Durante la actividad, parece que Ernesto distingue entre atributos relevantes e irrelevantes (**KPM**), al comentar: “*Estamos diciendo características de los polígonos, pero que también son características de otras figuras*”, considerando como atributos relevantes que los polígonos *no tienen ninguna curva, son figuras planas y son figuras cerradas*; y el resto de propiedades como irrelevantes. Además, a partir de comentarios como: “*  Veis que le falta algo o le sobra?*”, parece que el maestro sabe que una definición tiene que tener lo mínimo posible y no repetir elementos, de manera que conoce la importancia de la precisión en una definición matemática (**KPM**).

Una vez finalizada la definición, el maestro pregunta a los alumnos si el polígono está formado por los bordes o por el interior de la figura, puesto que parece que conoce que esta disyuntiva es una de las dificultades comunes en los alumnos de primaria (**KFLM-Fortalezas y dificultades**). Ernesto sabe que lo constituye el interior (**KoT-Definiciones, propiedades y sus fundamentos**) e intenta indicárselo a los alumnos: “*Son figuras planas... figuras planas, por aquí va...*”. Se podría entender que el maestro utiliza las cartulinas para que los alumnos vean que el polígono lo forma la propia cartulina, es decir, el interior de la figura (**KMT- Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos**).

Finalmente, se evidencia que Ernesto sabe que cuando se define un objeto matemático, este siempre va a ser el mismo y no puede estar caracterizado unas veces por la definición y otras no (**KPM**). En este caso, sabe que un polígono está formado siempre por el interior de la figura (**KoT- Definiciones, propiedades y sus fundamentos**).

Maestro: “*  Qué crees que es?   Lo de dentro o las líneas?*”.

Alumno: “*Algunas veces lo de dentro y otras lo de fuera*”.

Maestro: “*... No puede ser a veces lo de dentro y otras lo de fuera. O es siempre lo de fuera o es siempre lo de dentro*”.

4.2.- Una propuesta de conocimiento especializado deseable para un maestro de Primaria en torno a la definición de polígono

A continuación, se realiza una propuesta del conocimiento deseable para un maestro de Primaria en torno a la definición de polígono a partir de los elementos del marco teórico y el conocimiento evidenciado de Ernesto.

Sub-dominios	Categorías	Indicadores
KoT	Definiciones, propiedades y sus fundamentos	<ul style="list-style-type: none"> • Conoce las propiedades y los elementos de los polígonos. • Sabe una definición verbal de polígono y tiene una imagen del concepto formada por una gran variedad de ejemplos. • Conoce las clasificaciones de polígonos en función de criterios.
	Registros de representación	<ul style="list-style-type: none"> • Conoce representaciones no prototípicas de las figuras geométricas planas y el vocabulario geométrico asociado.
KSM	Conexiones de complejización	<ul style="list-style-type: none"> • Establece conexiones entre formas planas y tridimensionales. • Comprende la complejización del procedimiento de clasificación, desde la clasificación exclusiva hasta la inclusiva, y aplicando criterios simultáneos.
KPM	<i>Categorías pendientes de desarrollo</i>	<ul style="list-style-type: none"> • Entiende el papel de la justificación en matemáticas. • Conoce qué es una definición, los requisitos que debe verificar, sus roles y los procedimientos para construirla. • Comprende las diferencias entre una definición descriptiva y una constructiva. • Distingue entre atributos relevantes e irrelevantes. • Entiende que una figura geométrica puede tener diferentes definiciones. • Conoce el papel de los contraejemplos.

Tabla 2. Propuesta del conocimiento matemático deseable de un maestro

Sub- dominios	Categorías	Indicadores
KFLM	Fortalezas y dificultades	<ul style="list-style-type: none"> • Conoce las dificultades de los alumnos para construir la definición de polígono a partir de sus características. • Entiende las dificultades respecto a la imagen del concepto de polígono. • Conoce la dificultad de los alumnos de si el polígono está formado por los bordes o el interior de la figura.
KMT	Recursos materiales y virtuales	<ul style="list-style-type: none"> • Utiliza recursos como geoplanos, tangrams, Cabri Geometría, etc. • Utiliza cartulinas para que los alumnos vean que los polígonos están formados por el interior de la figura.
	Estrategias, técnicas, tareas y ejemplos	<ul style="list-style-type: none"> • Utiliza un procedimiento de comparación a partir de varias figuras para la construcción de la definición de polígono. • Usa la argumentación de sus afirmaciones y la utilización de vocabulario geométrico. • Desarrolla actividades que promuevan la construcción, reflexión de conceptos y la búsqueda de relaciones entre estos. • Utiliza una variedad de ejemplos y los representa en posiciones no habituales. • Sabe que definir por negación puede ayudar a los alumnos a que puedan ver las características diferenciadoras del objeto a definir.
KMLS	Nivel de desarrollo esperado	<ul style="list-style-type: none"> • Conoce las clasificaciones que los alumnos son capaces de realizar a partir de unos ejemplos concretos.
	Secuenciación con temas	<ul style="list-style-type: none"> • Conoce los contenidos geométricos que los alumnos han estudiado anteriormente.

Tabla 3. Propuesta del conocimiento didáctico del contenido deseable de un maestro

5.- CONCLUSIONES

A partir de esta investigación se puede destacar la importancia del conocimiento del profesor de matemáticas en el proceso de construcción de una definición a partir de la colaboración de los alumnos, pues es lo que permite guiar a los estudiantes en la realización de dicha tarea. Además, se remarca la idea de Zazkis y Leikin (2008) de que los conceptos matemáticos, las estructuras subyacentes de las definiciones y el proceso de definir son componentes fundamentales del conocimiento del profesor de matemáticas.

A partir del análisis realizado, se puede destacar, en primer lugar, la importancia del conocimiento matemático evidenciado de Ernesto. Por una parte, parece fundamental el conocimiento de las propiedades y los elementos de los polígonos, así como tener una imagen del concepto de polígono formada por una gran variedad de ejemplos (**KoT**), pues es lo que le permite verificar o corregir las afirmaciones de los alumnos, poder generar su propia definición de polígono y elegir los ejemplos que servirán para construir la definición; además de utilizar un vocabulario específico de geometría. Por otra parte, para poder guiar la construcción de la definición, necesita precisamente saber qué es una definición, los requisitos que debe verificar, cuáles son sus roles y los procedimientos para construirla (**KPM**).

Además, parece necesario el conocimiento sobre las fortalezas y dificultades de los alumnos, principalmente aquellos relacionados con la imagen del concepto de polígono y la construcción de una definición matemática (**KFLM**). Por eso, el maestro utiliza recursos, como las cartulinas, para representar los polígonos, y dispone las figuras de modo no prototípico; utiliza una gran variedad de ejemplos no prototípicos para la formación de la imagen del concepto; y, en lugar de enseñar la definición de polígono de un modo tradicional, opta por llevar a cabo una tarea que promueva la construcción y la reflexión de los conceptos geométricos, fomentando la argumentación de los alumnos en sus afirmaciones (**KMT**).

Finalmente, también se observa cómo el maestro necesita, para la planificación de la tarea, conocer los contenidos geométricos que sus alumnos han estudiado previamente y qué nivel se puede esperar de ellos (**KMLS**). En relación con esto último, parece muy importante que el maestro sepa qué exigencia se le puede pedir a unos alumnos de 5º de Primaria en la construcción de una definición matemática, pues evidentemente no se

puede pretender que esta verifique todos los requisitos recogidos por Borasi (1992; citado en Morgan, 2005).

A partir de la información recogida en el marco teórico, se ha completado el análisis de Ernesto con la idea de desarrollar una propuesta deseable para el maestro de Primaria en torno a la definición de polígono. Referente al conocimiento matemático, es importante que el maestro conozca diferentes clasificaciones de los polígonos en función de criterios y sepa aplicar la definición de polígono en tareas concretas (**KoT**), para así conocer si el maestro realmente comprende los conceptos y establece relaciones; así como que establezca relaciones entre formas planas y tridimensionales (**KSM**). Además, sería interesante que el maestro conozca en profundidad los requisitos y los roles de las definiciones matemáticas para promover la mejora de las futuras definiciones generadas por los alumnos, y que conociera que una figura geométrica puede tener diferentes definiciones (**KPM**). De esta manera, compartiendo la idea de De Villiers (1994; citado en De Villiers, 1998), se podrían construir diferentes definiciones en la clase para poder discutir las ventajas y desventajas de cada una de ellas.

Respecto al conocimiento didáctico, el maestro debería comprender las dificultades de los alumnos para construir la definición de polígono a partir de sus características (**KFLM**), pues se podía observar cómo los alumnos se fijaban principalmente en los elementos de los polígonos; en este sentido, parecía necesario que el maestro ejemplificara a qué se refería con características de un polígono. Además, para el desarrollo de esta actividad podría haber sido útil haber utilizado algún recurso como el geoplano, para que los alumnos pudieran manipular las figuras geométricas, entender las diferencias entre un polígono y una figura no poligonal, y formular conjeturas a partir de las relaciones observadas (**KMT**).

Finalmente, se propone para futuras investigaciones abordar estudios similares al de la construcción de una definición de polígono, como puede ser la construcción de otros conceptos, o analizar actividades en la que los alumnos tengan que realizar demostraciones matemáticas. De manera que el maestro tenga que hacer uso de su conocimiento sobre la práctica matemática (**KPM**) y así ayudar a construir categorías para dicho subdominio. Aunque puede ser difícil de detectar evidencias de las formas en la que el profesor realiza matemáticas, en este estudio se ha observado que con actividades específicas puede resultar más fácil. No obstante, como ha ocurrido en esta investigación,

para analizar dicho conocimiento en profundizar parece necesario realizar alguna entrevista o prueba.

6.- REFERENCIAS

- Aguilar, A. (2016). *El conocimiento especializado de una maestra sobre la clasificación de las figuras planas: un estudio de casos*. Tesis doctoral. Universidad de Huelva. (<http://hdl.handle.net/10272/12006>)
- Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Muñoz-Catalán, M. C. (2013). Determining Specialised Knowledge for Mathematics Teaching. In B. Ubuz, C., C. Haser, & M. A. Mariotti (Eds.), *Proceedings of the VIII Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME 8)* (pp. 2985-2994). Antalya: Middle East Technical University, Ankara.
- Climent, N., Carreño, E., & Ribeiro, C. M. (2014). Elementos de conocimiento matemático en estudiantes para profesor de matemática. El caso de los polígonos. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*. (pp. 1761-1769). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Climent, N., & Carrillo, J. (2005). Proyecto "METE" (Mathematics Education Traditions of Europe): polígonos en primaria. Documento interno del Proyecto.
- De Villiers, M. (1998). To teach definitions in geometry or teach to define? In A. Olivier, & K. Newstead (Eds.), *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education: Vol 2*. (pp 248-255). University of Stellenbosh: Stellenbosch.
- Escudero, A., & Carrillo, J. (2014). Conocimiento matemático sobre cuadriláteros en estudiantes para maestro. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVIII* (pp. 267-276). Salamanca: SEIEM.
- Gutiérrez, A., & Jaime, A. (1996). Uso de definiciones e imágenes de conceptos geométricos por los estudiantes de Magisterio. En J. Giménez, S. Llinares y V.

- Sánchez (Eds.). *El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación matemática* (pp. 143-170). Granada: Comares.
- Jaime, A., Chapa, F., & Gutiérrez, A. (1992). Definiciones de triángulos y cuadriláteros: Errores e inconsistencias en libros de texto de E.G.B. *Epsilon*, 23, 46-62.
- López, M. B., & Esteves, M. A. Z. (2015). Obstáculos y errores en la enseñanza-aprendizaje de las figuras geométricas. *Campo Abierto. Revista de Educación*, 27(1), 55-71.
- Mariotti, M. A., & Fischbein, E. (1997). Defining in classroom activities. *Educational Studies in Mathematics*, 34(3), 219-248.
- Morgan, C. (2005). Word, definitions and concepts in discourses of mathematics, teaching and learning. *Language and education*, 19(2), 102-116
- Muñoz Catalán, M. C. (2009). *El desarrollo profesional en un entorno colaborativo centrado en la enseñanza de las matemáticas: el caso de una maestra novel*. Tesis doctoral. Universidad de Huelva. (<http://hdl.handle.net/10272/2949>)
- Muñoz-Catalán, M. C., Montes, M. A., Carrillo, J., Climent, N., Contreras, L. C., & Aguilar, A. (2013). *La Clasificación de las Figuras Planas en Primaria: Una Visión de Progresión entre Etapas y Ciclos*. Huelva: Universidad de Huelva Publicaciones. Materiales para la docencia, 139.
- Novo, C. (2014). *Conocimiento Didáctico de fracciones de un maestro de sexto de primaria*. Trabajo Fin de Máster no publicado. Universidad de Huelva.
- Junta de Andalucía (2015). Decreto 97/2015, de 3 de marzo, por el que se establece la ordenación y las enseñanzas correspondientes a la Educación Primaria en Andalucía.
- Stake, R. E. (2005). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata (traducción del original de 1995, The art of case study research).
- Zaslavsky, O., & Shir, K. (2005). Students' conceptions of a mathematical definition. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(4), 317-346.
- Zazkis, R., & Leikin, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics*, 69(2), 131-148.